Famiglie di curve a un parametro e integrazione

Definizione 1 Sia γ_s una famiglia di curve regolari (orientate) per $s \in [0, s_0]$. Diremo che γ_s tende a γ_0,

$$\lim_{s\to 0} \gamma_s = \gamma_0 \,,$$

se esiste una famiglia di parametrizzazioni regolari $t \in [a, b] \mapsto z_s(t) \in \mathbb{C}$ tali che

$$\sup_{s,t} |z_s'(t)| < +\infty \,, \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0} \sup_{a\le t\le b} \big(|z_s(t) - z_0(t)| + \big(|z_s'(t) - z_0'(t)|\big) = 0 \,. \tag{$*$}$$

Lemma *Sia γ_s una famiglia di curve regolari che tende a γ_0 e $f \in C(K, \mathbb{C})$, dove K è un compatto che contiene $\bigcup_{0\le s\le s_0} \gamma_s$. Allora,*

$$\lim_{s\to 0} \int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz \,.$$

Dimostrazione Sia $M > 0$ tale che

$$\sup_{s,t} |z_s'(t)| < M \,, \qquad \sup_K |f| < M \,. \tag{1}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che[1]

$$|f(z) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \,, \qquad \forall\ z, w \in K \,, \text{Con } |z - w| < \delta \,. \tag{2}$$

Sia ora $\bar{s} \in (0, s_0)$ tale che[2]

$$\sup_{\substack{0<s<\bar{s} \\ a\le t\le b}} |z_s(t) - z_0(t)| < \delta \,, \qquad \sup_{\substack{0<s<\bar{s} \\ a\le t\le b}} |z_s'(t) - z_0'(t)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \,. \tag{3}$$

Allora, se $0 < s < \bar{s}$, da (1), (2) e (3) segue che

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz\Big| = \Big|\int_a^b \Big(f(z_s(t))z_s'(t) - f(z_0(t))z_0'(t)\Big)dt\Big| \\
&\le \int_a^b \big(|f(z_s(t)) - f(z_0(t))|\, |z_s'(t)| + |f(z_0(t))|\, |z_s'(t) - z_0'(t)|\big)dt \\
&\le \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} M(b-a) + M \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} (b-a) = \varepsilon \,. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[1] Tale δ esiste per il teorema di Heine–Cantor.
[2] Tale $\bar{s}$ esiste per la Definizione 1.